

Олимпиада «iSpring.Вызов -2023»

Секция: Математика и алгоритмика

Задания для 5–6 классов

1. Часы Милы. Мила делала допоздна домашнее задание и с ужасом заметила, что на её часах две цифры погасли, и остались только цифры 2, 0, 2, 2 (именно в таком порядке). Назовите самый поздний момент в сутках, когда это могло произойти, если известно, что электронные часы показывают время так: часы, минуты и секунды, например, 13:15:45.

2. Надёжный пароль. Павел, не знающий правил компьютерной безопасности, установил на компьютер пароль, который является двузначным числом, и сразу его забыл. Единственное, что помнил Павел: сумма цифр этого числа, сложенная с их произведением, равна самому числу. Напишите все возможные варианты пароля.

3. Карусель RGB. Денис заметил, что на карусели шестьдесят сидений расположены по кругу через равные промежутки. Каждое покрашено в красный (Red), зеленый (Green) или синий (Blue) цвет. Сиденья одного и того же цвета расположены подряд и пронумерованы 1, 2, 3, ... по часовой стрелке. Зелёное сиденье № 9 противоположно красному № 2, а синее № 6 – красному № 16. Найдите, сколько на карусели красных, зелёных и синих сидений.

4. Любимые слова. Анастасия Евгеньевна написала своё любимое слово и все его циклические сдвиги, получив таблицу 1. Затем, упорядочив эти «слова» по алфавиту, она составила таблицу 2 и выписала её последний столбец и получила «слово»: ТХИФОНЕ.

Таблица 1	Таблица 2
ИНФОТЕХ	ЕХИНФОТ
ХИНФОТЕ	ИНФОТЕХ
ЕХИНФОТ	НФОТЕХИ
ТЕХИНФО	ОТЕХИНФ
ОТЕХИНФ	ТЕХИНФО
ФОТЕХИН	ФОТЕХИН
НФОТЕХИ	ХИНФОТЕ

Александр Иванович сделал то же самое со своим любимым словом и получил «слово» РТАИДЕГН. Что это за слово, если оно начинается с буквы Г?

Задания для 7–9 классов

1. Странный калькулятор. С помощью странного калькулятора можно выполнять два действия с дробями: прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно и умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число.

В данный момент дробь на калькуляторе равна $\frac{13}{667}$. Владимиру дробь очень не нравится, и он хочет её исправить. Сможет ли он с помощью двух этих действий получить дробь,

а) равную $\frac{1}{3}$; б) равную 1?

2. Многорукий напёрсточник. На столе в ряд стоят 127 напёрстков, под одним из которых находится шарик. Про каждый напёрсток напёрсточник сказал либо «Здесь шарика нет», либо «Шарик под соседним напёрстком». Известно, что только одно из этих утверждений истинно. Что напёрсточник сказал про средний напёрсток?

3. Утренняя зарядка. В каникулы Никита утром подолгу делает зарядку и одновременно с этим заряжает телефон. На быстрой зарядке телефон полностью заряжается за 1 час 20 минут, а на обычной – за 4 часа. Никита поставил полностью разряженный телефон сначала на обычную зарядку и начал крутить педали на велотренажере. Спустя какое-то время он обнаружил у велотренажера нужный блок и переставил телефон на быструю зарядку до 100%, а сам начал заниматься силовыми упражнениями. Найдите общее время Никитиной утренней зарядки, если известно, что суммарно Никита занимался зарядкой столько же, сколько заряжался телефон и на быстрой зарядке телефон находился одну треть от общего времени зарядки. Считайте, что и при быстрой, и при обычной зарядке телефон заряжается равномерно.

4. Экономное взвешивание. В кабинете русского языка есть двухчашечные весы без гирек, которыми каждый ученик может воспользоваться по 2 раза в день. У Ромы Большого есть 3 неотличимые внешне плашки весом 9, 10 и 11 граммов. Понятно, что за 2 взвешивания ему не разобраться, какая из плашек сколько весит. Его друг, Рома Маленький, находится в точно такой же ситуации: у него тоже есть 3 неотличимые на вид плашки весом 9, 10 и 11 граммов. Докажите, что если они объединят усилия, то за отведённые 4 взвешивания оба Ромы определят веса всех шести плашек за один день.

Задания для 10–11 классов

1. Неизвестные цифры.

Цифры от 0 до 9 зашифрованы буквами А, Б, В, Г, Д, Е, Ё, Ж, З, И в каком-то порядке. Антон может за один вопрос узнать зашифрованную запись суммы нескольких различных букв. Например, если он спросит, чему равно « $A+B=?$ », то в случае, когда $A=9$, $B=1$, $V=0$, ответом будет « $A+B=БВ$ ». Как можно за несколько таких вопросов определить, какие буквы каким цифрам соответствуют? Как Антону обойтись меньшим числом вопросов?

2. Игра с числами.

На доске записаны два числа: 2022 и 2023. Богдан и Тахир ходят по очереди, начинает Богдан. За один ход можно

– либо уменьшить одно из чисел на его ненулевую цифру или на ненулевую цифру другого числа;

– либо разделить одно из чисел пополам, если оно четное.

Выигрывает тот, кто первым напишет однозначное число. Кто из них может выиграть, как бы ни играл соперник? Опишите его стратегию и докажите, что она выигрышная.

3. Экономное взвешивание–2.

В кабинете русского языка есть чашечные весы – они показывают, какая чашка тяжелее, но не показывают, насколько. За каждое взвешивание Вадим платит Маше (до взвешивания) одну монету из имеющихся у него. Если уплачена настоящая монета, Маша сообщит Вадиму верный результат взвешивания, а если фальшивая, то случайный. У Вадима есть 8 монет, про которые он знает только, что 7 из них настоящие и весят одинаково, а одна фальшивая и отличается от настоящей по весу, неизвестно в какую сторону. Вадим хочет определить 5 настоящих монет и не отдать ни одну из этих монет Маше. Может ли Вадим гарантированно этого добиться?

4. Перестановочные квадраты.

Иван написал программу, которая для введённого 2024-значного числа генерирует все возможные 2024-значные числа, полученные из данного числа перестановкой его цифр и проверяющую, является ли полученное число полным квадратом. Существует ли 2024-значное число, из которого перестановкой цифр можно получить 2024 разных полных квадрата?